ANALYSIS

Einführung in die Integralrechnung

Teil 2

Ganzrationale und Gebrochen rationale Funktionen

Unbestimmte Integrale und Stammfunktionen
auch mit Substitution

Kurze Theorie und viel Praxis

Datei Nr. 48012

Stand 10. Juni 2017

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Stoff-Verteilung Integration

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden zu gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48051	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Gebrochen rationale Funktionen: Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Schwere Integrale mit gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Schulen, welche im Abitur CAS-Rechner zulassen, haben ihren Stoffbereich eingeschränkt. Damit werden viele Integrationsmethoden nicht mehr behandelt, weil dazu der Rechner verwendet werden darf. In den Pflichtaufgaben ohne Hilfsmittel werden jedoch bestimmte Grundkenntnisse abgeprüft. Dazu gehören die Integration von Potenzfunktionen aller Art, von ganzrationalen Funktionen und von gebrochen rationalen Funktionen, zu denen man kein Substitution benötigt. Hier findet der Leser beide Methoden: Anwendung der Kettenregel und der Substitution.

Daher gibt es jetzt neben diesem Text, der noch die ganze Anforderungsbreite enthält (und daher für Leistungskurse und Studenten nach wie vor von Bedeutung ist) den neuen Text:

48030 Integration – Grundniveau

Dort findet man weitere Beispiele und Aufgaben zu den genannten Funktionstypen. Es ist ein reiner Trainingstext.

Inhalt

1	**Grundregeln der Integration**		4
	1.1	Was bisher geschah (Grundintegral 1)	4
	1.2	Grundregeln der Integration	5
2	**Integration ganzrationaler Funktionen**		6
3	**Integration gebrochen rationaler Funktionen**		7
	3.1	1. Merkmal: Reine Potenzfunktion	7
	3.2	2. Merkmal: Potenzfunktion mit konstantem Faktor	8
	3.3	3. Merkmal: Der Nenner enthält keine Summe	9
	3.4	4. Merkmal: Der Nenner enthält eine Summe und der Zähler kein x	
		1. Methode: Potenzregel und Kettenregel	10
		2. Methode: Einfache Substitution	11
	3.5	5. Merkmal: Der Nenner enthält eine Summe und der Zähler auch x (Erweiterte Substitution)	14
	3.6	6. Merkmal: Der Nenner enthält eine Summe mit x^2 und der Zähler auch x (Erweiterte Substitution quadratischer Terme)	16
4	**Zusammenstellung aller Trainingsaufgaben**		17
5	**Lösungen aller Trainingsaufgaben**		19 - 24

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Grundregeln der Integration

1.1 Was bisher geschah

Als **Differential** einer Funktion $y = f(x)$ bezeichnet man den Term $dy = f'(x) \cdot dx$.

Die Methode, ein Differenzial rückgängig zu machen, nennt man Integration. Es gilt die Schreibweise:

$$\int dy = y + C \quad \text{bzw.} \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C\,.$$

Die Konstante C muss dazukommen, weil eine solche Konstante beim Ableiten verschwindet, also bei der Umkehrung nicht mehr rekonstruierbar ist. Geht man von einer Funktion f aus, dann nennt man die mit diesem sogenannten unbestimmten Integral erzeugte Funktion eine Stammfunktion F zu f:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \ldots + C$$

Weil dieses Integrieren die Umkehrung zum Ableiten ist, kann man die Probe machen:

Es muss gelten: $F'(x) = f(x)$

Erstes bisher bekanntes Grundintegral aus Teil 1:

$$\text{Grundintegral 1:} \quad \int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{für } n \neq -1 \\ \ln x + C & \text{für } n = -1 \end{cases} \qquad \text{(G1)}$$

Hinweis: Der zweite Fall heißt ausführlich: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.2 Grundregeln der Integration

Grundregel 1: Konstante Faktoren stehen lassen

Bereits vom Ableiten her weiß man, dass ein konstanter Faktor ohne Einfluss ist und stehen bleibt.

$$f(x) = k \cdot x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = k \cdot 2x\,.$$

Das gilt dann genauso bei der Umkehrung des Ableitens:

$$\boxed{\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx}$$

Beispiel: $\int 5x^3 dx = 5 \cdot \int x^3 dx = 5 \cdot \frac{1}{4}x^4 + C = \frac{5}{4}x^4 + C$

Probe: $\left(\frac{5}{4}x^4 + C\right)' = 5x^3$.

Grundregel 2: Summanden werden getrennt integriert

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

Beispiel: $\int \left(x^2 + x^3\right) dx = \int x^2\,dx + \int x^3\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$

Probe: $\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C\right)' = x^2 + x^3$

Grundregel 3: Linearität des Integrals

$$\boxed{\int [r \cdot f(x) + s \cdot g(x)]\,dx = r \cdot \int f(x)\,dx + s \cdot \int g(x)\,dx}$$

Beispiel:

$$\int \left(\tfrac{1}{2}x^3 - 5x^2\right) dx = \tfrac{1}{2}\int x^3\,dx + (-5)\int x^2\,dx = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}x^4 - 5 \cdot \tfrac{1}{3}x^3 + C = \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{5}{3}x^3 + C$$

Die Regel 3 ist keine neue Regel, sie vereint lediglich die Grundregeln 1 und 2 in einer Formel.

Mit ihr können wir jetzt alle ganzrationalen Funktionen integrieren.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2 Integration ganzrationaler Funktionen

Mit der Potenzregel (1. Grundintegral) und den soeben gezeigten Grundintegralen lassen sich alle ganzrationalen Funktionen leicht integrieren, d.h. die Stammfunktion aufstellen.

Beispiele

(1) Berechne die Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$.

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{4}x^2 + 3x - 2\right)dx = \frac{1}{4}\int x^2\,dx + 3\int x\,dx - 2\int dx =$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 + 3\cdot\frac{1}{2}x^2 - 2x + C = \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

Die Aufspaltung in die einzelnen Teilintegrale lassen wir künftig weg und gehen so vor: Summanden werden getrennt integriert und die konstanten Faktoren bleiben stehen.

(2) $$\int\left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 3\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + C = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$$

(3) $$\int\left(2x^5 + 3x^3 - 2x - 1\right)dx = 2\cdot\frac{1}{6}x^6 + 3\cdot\frac{1}{4}x^4 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C = \frac{1}{3}x^6 + \frac{3}{4}x^4 - x^2 - x + C$$

Trainingsaufgaben 1

a) $\int(3x+1)dx$

b) $\int\left(x^2 - 2x - 5\right)dx$

c) $\int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx$

d) $\int\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2\right)dx$

e) $\int\left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right)dx$

f) $\int\left(-\frac{1}{8}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 7\right)dx$

Bestimme C so, dass das Schaubild der Stammfunktion F durch den Punkt P geht:

g) $f(x) = x^2 - 1$ $\quad P(3\,|\,-1)$

h) $f(x) = x^3 - 2x$ $\quad P(1\,|\,0)$

i) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x - 4$ $\quad P(0\,|\,8)$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3 Integration gebrochen rationaler Funktionen

Bei der Integration gebrochen rationaler Funktionen gibt es je nach Form des Funktionsterms verschiedene Methoden.

Daher ist es sehr wichtig, dass man die Merkmale erkennt und die zugehörigen Methoden weiß.

3.1 1. Merkmal: Reine Potenzfunktion

(1) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$ Auswendig lernen lohnt sich!

(2) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(3) $\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C) - \frac{1}{3} \cdot x^{-3} + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

Man schreibt den Bruch erst als Potenzfunktion, **erhöht** den Exponent um 1 und teilt durch diese neue Hochzahl.

Achtung: Hier machen viele Schüler immer wieder den Fehler, dass sie die Hochzahl verkleinern statt vergrößern: - 3 um 1 vergrößern ergibt nicht – 4, sondern - 2.

Wir machen zu diesen 3 Integralen noch die Probe durch Ableiten:

(1) $F(x) = -\frac{1}{x} + C = -x^{-1} + C$ $F'(x) = +x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

(2) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2} + C$ $F'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-2x^{-3}\right) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

(3) $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C = -\frac{1}{3} \cdot x^{-3} + C$ $F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \left(-3x^{-4}\right) = \frac{1}{x^4}$

Und jetzt noch einmal das schon angesprochene Ausnahmeintegral:

(4) $\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C}$

Wer versucht, hier genauso die Potenzregel anzuwenden, erhält folgenden *Unsinn*:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \cancel{\frac{x^0}{0}} + C \quad ???$$

Wir werden uns damit noch ausführlich beschäftigen.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3.2 2. Merkmal: Potenzfunktionen mit konstantem Faktor

(5) $$\int \frac{4}{x^2}dx = \int \boxed{4\cdot x^{-2}}\,dx = 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{4}{x}+C$$

Wer diese Aufgabe einige Male gerechnet hat, der muss die beiden Zwischenschritte nach dem 1. und dem 2. Gleichheitszeichen nicht mehr anschreiben, denn er weiß:

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C} \qquad (*)$$

Dies kommt bei gebrochen rationalen Funktionen am häufigsten vor.

Ganz wichtig:

Zur Berechnung der Stammfunktion muss man Terme wie $4x^2$, $\frac{4}{x^2}$, $\frac{1}{4x^2}$ in ein Produkt $\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufsplitten. Der Zahlenfaktor bleibt dann stehen, die x-Potenz wird aufgeleitet, d. h. der Exponent wird um 1 erhöht, und durch diese neuen Exponenten wird noch geteilt.

Man rechnet also:

$$\int 4x^2dx = 4\cdot\int x^2\cdot dx = 4\cdot\boxed{\tfrac{1}{3}x^3}+C = \tfrac{4}{3}x^3+C$$

$$\int \frac{4}{x^2}dx = \int 4\cdot\frac{1}{x^2}dx = 4\cdot\int x^{-2}dx = 4\cdot\boxed{\frac{x^{-1}}{-1}}+C = -\frac{4}{x}+C$$

$$\int \frac{1}{4x^2}dx = \int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{4}\cdot\int x^{-2}dx = \frac{1}{4}\cdot\boxed{\frac{x^{-1}}{-1}}+C = -\frac{1}{4x}+C$$

Weitere Beispiele:

(6) $$\int\left(-\frac{6}{x^2}\right)dx = \int \boxed{-6\cdot x^{-2}}\,dx = -6\cdot\int x^{-2}dx = -6\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C = \frac{6}{x}+C$$

Wer die Formel (*) im Kopf hat, kann einiges aus dieser Rechnung weglassen!

(7) $$\int \frac{4}{x^3}dx = \int \boxed{4\cdot\frac{1}{x^3}}\,dx = 4\int x^{-3}dx = 4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C = -\frac{2}{x^2}+C$$

(8) $$\int \frac{1}{3x^2}dx = \int \boxed{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int x^{-2}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right)+C = -\frac{1}{3x}+C$$

Hier muss man den Faktor im Nenner auch dort lassen, denn es gilt ja $\boxed{\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}}$!

(9) $$\int \frac{5}{2x^3}dx = \int \boxed{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^3}}\,dx = \frac{5}{2}\int x^{-3}dx = \frac{5}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C = -\frac{5}{4x^2}+C$$

(10) $$\int \frac{6}{5x^4}dx = \int \boxed{\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x^4}}\,dx = \frac{6}{5}\int x^{-4}dx = \frac{{}^{2}\cancel{6}}{5}\cdot\frac{x^{-3}}{-\cancel{3}_{1}}+C = -\frac{2}{5x^3}+C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3.3 3. Merkmal: Der Nenner enthält keine Summe

METHODE: Zerlege den Radikanden in Einzelbrüche.

Man sollte zuvor die Beispiele der Seite vorher (blaue Färbung) gelesen haben.

(1) $\int \frac{x^2-4}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx = \int\left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx = \int\left(1-4x^{-2}\right)dx = x-4\frac{x^{-1}}{-1}+C = x+\frac{4}{x}+C$

(2) $\int \frac{x^3-4x^2+1}{2x^2}dx = \int\left(\frac{x^3}{2x^2}-\frac{4x^2}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{2}x-2+\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)+C = \frac{1}{4}x^2-2x-\frac{1}{2x}+C$

(3) $\int \frac{x^3-2x}{x^2}dx = \int\left(x-\frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2-2\cdot\ln|x|+C$

(4) $\int \frac{\left(x^2-2\right)^2}{8x^2}dx = \int \frac{x^4-4x^2+4}{8x^2}dx = \int\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx$

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)+C = \frac{1}{24}x^3-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}+C$

(5) $\int \frac{x^2-4}{3x}dx = \int\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}\cdot\ln|x|+C = \frac{1}{6}x^2-\frac{4}{3}\ln|x|+C$

(6) $\int \frac{x^2-3x+4}{2x^3}dx = \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}x^{-2}+2x^{-3}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)+2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} = \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x^2}+C$

Trainingsaufgaben 2

(1) $\int \frac{3}{x^2}dx$ (2) $\int \frac{4}{x}dx$ (3) $\int \frac{1}{2x^3}dx$

(4) $\int \frac{2x^2-1}{x^2}dx$ (5) $\int \frac{x-2}{x^2}dx$ (6) $\int \frac{x^2-9}{x}dx$

(7) $\int \frac{\left(x^2-2\right)^2}{4x}dx$ (8) $\int \frac{x^3-8}{2x^2}dx$ (9) $\int \frac{x^3-8}{4x}dx$

(10) $\int \frac{x^2+3x-2}{4x}dx$ (11) $\int \frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}dx$ (12) $\int \frac{x^2-3}{x^3}dx$

(13) $\int \frac{x^4+x^2-2}{4x^3}dx$ (14) $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x^3}dx$ (15) $\int \frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2}dx$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3.4 4. Merkmal: Der Nenner enthält eine Summe und der Zähler kein x

Ist der Nennerterm eine Klammer der Form **$(ax + b)^n$**, dann gibt es *zwei Methoden*:

1. Methode: Potenzregel und Kettenregel (Division durch die innere Ableitung)

a) $$\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \int (2x+1)^{-2}\,dx = \frac{(\boxed{2}x+1)^{-1}}{-1\cdot\boxed{2}} + C = -\frac{1}{2\cdot(2x+1)} + C$$

Hier wurde so aufgeleitet, wie bei $\int \frac{1}{x^2}\,dx$, nur dass statt x eine Summe da steht, also eine Verkettung vorliegt. **Daher wurde zusätzlich durch die innere Ableitung $\boxed{2}$ dividiert.**

Man kann, wenn man unsicher ist, ob das so richtig geworden ist, die Probe machen.

Dazu leitet man diese Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{2(2x+1)} + C$ ab

Zum Ableiten verwendet man wieder die Potenzschreibweise:

$$F(x) = -\frac{1}{2(2x+1)} + C = -\tfrac{1}{2}(2x+1)^{-1} + C \xrightarrow{\text{Ableiten}} f(x) = +\tfrac{1}{2}(2x+1)^{-2}\,\boxed{\cdot 2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

Bei der Anwendung der Ableitungs-Potenzregel muss man die Kettenregel anwenden, die besagt, dass man (weil man ja eine Klammer statt einer einfachen x-Potenz ableitet) noch mit der inneren Ableitung (der Klammer) multiplizieren muss. Entsprechend wird beim Aufleiten durch diese innere Ableitung dividiert.

b) $$\int \frac{1}{(4x-1)^2}\,dx = \int (4x-1)^{-2}\,dx = \frac{(\boxed{4}x-1)^{-1}}{-1\cdot\boxed{4}} + C = -\frac{1}{4\cdot(4x-1)} + C$$

Ganz ausführlich:

$\int (4x-1)^{-2}\,dx$	Exponent der Klammer um 1 erhöhen und durch den neuen Exponent teilen	$\frac{(4x-1)^{-1}}{-1}$	zusätzlich noch durch die innere Ableitung (der Klammer) teilen	$\frac{(\boxed{4}x-1)^{-1}}{-1\cdot\boxed{4}}$

Hinweis: Diese Methode, einen Klammerterm zu integrieren, klappt nur bei linearen Klammerinhalten, also der Form (ax+b).

Enthält die Klammer beispielsweise x^2, wird das Ergebnis wieder falsch.
Man kann das jederzeit durch eine Ableitungs-Probe überprüfen.

Ich zeige nun, wie man diese beiden Integrale mit der Methode der Substitution berechnen kann.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Methode: Integration durch „*einfache*“ Substitution

(1) Da es für ein Integral der Form $\int \frac{1}{2x+1}dx$ keine eigene Integrationsregel gibt, wendet man einen Trick an. Man ersetzt den durch eine Summe kompliziert gewordenen Nenner durch eine neue Variable u, was man eine **Substitution** nennt. So entsteht ein berechenbares Integral:

Substitutionsmethode:

Man ersetzt die Summe 2x + 1 durch u: $\boxed{u = 2x+1}$.

Diesen Variablenwechsel von der Variablen x zu einer neuen Variablen u muss man konsequent weiterführen, d. h. man muss auch dx auf du umrechnen. dx ist ein Differenzial.
Für Differenziale gibt es diese Formel: $\boxed{dy = y' \cdot dx}$ oder $\boxed{du = u' \cdot dx}$

Unsere Substitutions-Funktion heißt $\boxed{u = 2x+1}$.

Dazu bilden wir das Differenzial: $\boxed{du = u' \cdot dx = 2 \cdot dx}$

Oder umgekehrt: $\boxed{dx = \frac{1}{2}du}$

So sieht dann die Umrechnung des komplizierten Integrals auf ein einfacheres aus:

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2}\boxed{dx} = \int \frac{1}{u^2} \cdot \boxed{\tfrac{1}{2}du} = \tfrac{1}{2}\int u^{-2}du = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2u} + C.$$

Unsere Stammfunktion enthält u, und bezieht sich nicht auf die vorgegebene Variable x. Daher muss das Ergebnis wieder auf x zurückgerechnet werden: Man nennt dies **Rücksubstitution.** Dabei ersetzt man u wieder durch seine Bedeutung, also durch 2x + 1. Damit sieht die komplette Berechnung so aus:

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2}dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}\int u^{-2}du = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2u} + C = \boxed{-\frac{1}{2(2x+1)} + C}$$

Die Methode der Substitution lässt sich im Gegensatz zur 1. Methode, die auf der vorigen Seite gezeigt worden ist, auch bei komplizierteren Nennertermen anwenden und ist daher vielseitiger einsetzbar.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(2) Das ist für ein Integral der Form $\int \frac{1}{(4x-1)^2}dx$ schon eine Stufe schwieriger.

Substitutionsmethode:

Man ersetzt die Summe 4x - 1 durch u: $\boxed{u = 4x - 1}$.

Der Variablenwechsel von x zu u muss man auf das Differential ausdehnen:

Für Differenziale gibt es diese Formel: $\boxed{dy = y' \cdot dx}$ oder $\boxed{du = u' \cdot dx}$

Unsere Substitutions-Funktion heißt $\boxed{u = 4x - 1}$.

Dazu bilden wir das Differenzial: $\boxed{du = u' \cdot dx = 4 \cdot dx}$

Oder umgekehrt: $\boxed{dx = \frac{1}{4}du}$

So sieht die dann Umrechnung des komplizierten Integrals auf ein einfacheres aus:

$$\int \frac{1}{(4x-1)^2}\boxed{dx} = \int \frac{1}{u^2} \cdot \boxed{\frac{1}{4}du} = \frac{1}{4} \cdot \int u^{-2}du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{4u} + C \ .$$

Rücksubstitution. Dabei ersetzt man u wieder durch seine Bedeutung, also durch 4x - 1

Damit sieht die komplette Berechnung so aus:

$$\int \frac{1}{(4x-1)^2}\boxed{dx} = \int \frac{1}{u^2} \cdot \boxed{\frac{1}{4}du} = \frac{1}{4} \cdot \int u^{-2}du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{4u} + C = -\frac{1}{4 \cdot (4x-1)} + C$$

(3) Das Integral $\int \frac{5}{2x+1}dx$ enthält zusätzlich den konstanten Faktor 5.

Zusätzlich tritt das besprochene Ausnahme-Integral auf:

Substitutionsmethode: Man ersetzt die Summe 2x+1 durch u: $\boxed{u = 2x + 1}$.

Dazu bilden wir das Differenzial: $\boxed{du = u' \cdot dx = 2 \cdot dx}$

Oder umgekehrt: $\boxed{dx = \frac{1}{2}du}$

So sieht die dann Umrechnung des komplizierten Integrals auf ein einfacheres aus:

$$\int \frac{5}{2x+1}dx = \int \frac{5}{u} \cdot \boxed{\frac{1}{2}du} = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{5}{2} \cdot \ln|u| + C = \frac{5}{2}\ln|2x+1| + C$$

Wir machen die Probe und benötigen dazu folgende Kenntnisse:

$f(x) = \ln x$ hat als Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln(2x+1)$ hat als Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$

Hier wurde der Kehrwert des Arguments (2x+1) gebildet und dann noch mit dessen Ableitung (man nennt dies die innere Ableitung) multipliziert.

Probe: $F(x) = \frac{5}{2}\ln|2x+1| + C \Rightarrow F'(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} = \frac{5}{2x+1}$

Und genau dies war der ursprüngliche Integrand.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

METHODE der einfachen Substitution bei gebrochen rationalen Funktionen

Beim Integral der Form $\boxed{\int \frac{k}{(ax+b)^n}\,dx}$ ersetzt man zuerst den Nenner:

Die Substitution: u = ax+b führt auf $\int \frac{k}{u^n}\,dx$.

Dann muss man dx mittels $\boxed{du = u' \cdot dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{u'} \cdot du}$ umrechnen und ersetzen.

Jetzt bildet man die Stammfunktion (die dann u als Variable hat).

Am Ende wird rücksubstituiert, so dass die Stammfunktion F wieder x als Variable hat.

Weitere Beispiele zur „einfachen“ Substitution.

(4) $\int \frac{16}{(x-2)^2}\,dx$ Substitution: u = x – 2 also du = u' dx = dx

Lösung ohne Substitution: $\int \frac{16}{(x-2)^2}\,dx = 16\int (x-2)^{-2}\,dx = 16 \cdot \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{16}{x-2} + C$

(5) $\int \frac{8}{(4-x)^2}\,dx$ Substitution: u = 4 – x also du = - dx, dx = - du

$$= -\int \frac{8}{u^2}\,du = -\int 8u^{-2}\,du = -8\frac{u^{-1}}{-1} = +\frac{8}{u} + C = \frac{8}{4-x} + C$$

Lösung ohne Substitution: $\int \frac{8}{(4-x)^2}\,dx = 8\int (4-x)^{-2}\,dx = 8\frac{(4-x)^{-1}}{-1\cdot(-1)} + C = +\frac{8}{4-x} + C$

(6) $\int \frac{12}{(2x-1)^3}\,dx$ Substitution: u = 2x – 1 also du = 2 dx, dx = $\frac{1}{2}$du

$$F(x) = \int \frac{12}{u^3} \cdot \tfrac{1}{2}\,du = 6\int u^{-3}\,du = 6\frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{u^2} + C = -\frac{3}{(2x-1)^2} + C$$

Lösung ohne Substitution: $\int \frac{12}{(2x-1)^3}\,dx = 12\int (2x-1)^{-3}\,dx = 12 \cdot \frac{(2x-1)^{-2}}{-2\cdot 2} + C = -\frac{3}{(2x-1)^2} + C$

Trainingsaufgaben 3

Diese Aufgaben sind nach beiden Methoden lösbar

(1) $\int \frac{4}{(4x+5)^2}\,dx$ (2) $\int \frac{2}{(1-x)^3}\,dx$ (3) $\int \frac{24}{(x+12)^2}\,dx$

(4) $\int \frac{3}{3-x}\,dx$ (5) $\int \frac{-3}{(2x-4)^4}\,dx$ (6) $\int \frac{12}{(x-2)^5}\,dx$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3.5 5. Merkmal: Der Nenner enthält eine Summe und der Zähler <u>auch</u> x

Die erweiterte Substitution

Dieses x im Zähler erschwert die Rechnung. Jetzt hilft nur noch eine Substitutionsmethode.

Beispiele

(1) $\int \frac{x}{(5x+2)^2}\,dx$ Ganz ausführlich alle Schritte dargestellt:

1. Schritt: Substitution: $u = 5x + 2$
2. Schritt: Differential: $du = u' \cdot dx = 5\,dx$
3. Schritt: Nach dx auflösen: $\boxed{dx = \frac{1}{5}du}$
4. Schritt: u nach x auflösen: $x = \frac{1}{5}(u-2)$
5. Schritt: Einzelbrüche herstellen:
6. Schritt: „Aufleiten“:
7. Schritt: Rücksubstitution:

$$\int \frac{x}{(5x+2)^2}\boxed{dx} = \int \frac{u-2}{5\cdot u^2}\cdot\boxed{\frac{1}{5}du} = \frac{1}{25}\int \frac{u-2}{u^2}du$$

$$= \frac{1}{25}\int\left(\frac{u}{u^2} - \frac{2}{u^2}\right)du = \frac{1}{25}\int\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}\right)du$$

$$= \frac{1}{25}\int\left(\frac{1}{u} - 2u^{-2}\right)du$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\left[\ln|u| - 2\frac{u^{-1}}{-1}\right] + C = \frac{1}{25}\left(\ln|u| + \frac{2}{u}\right) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{25}\cdot\left(\ln|5x+2| + \frac{2}{5x+2}\right) + C$$

(2) $\int \frac{x^2}{(x+3)^2}\,dx$ Substitution: $u = x + 3$, $du = dx$ und $x = u - 3$

$$= \int \frac{(u-3)^2}{u^2}du = \int \frac{u^2 - 6u + 9}{u^2}du = \int\left(1 - \frac{6}{u} + \frac{9}{u^2}\right)du = \int\left(1 - \frac{6}{u} + 9u^{-2}\right)du = u - 6\cdot\ln|u| - \frac{9}{u} + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = x + 3 - 6\cdot\ln|x+3| - \frac{9}{x+3} + C$

(3) $\int \frac{x^2}{(2-x)^2}\,dx$ Substitution: $u = 2 - x$ also $du = -dx$, $dx = -du$
und: $x = 2 - u$

$$= -\int \frac{(2-u)^2}{u^2}du = -\int \frac{4 - 4u + u^2}{u^2}du = -\int\left(\frac{4}{u^2} - \frac{4}{u} + 1\right)du = -\int\left(4u^{-2} - \frac{4}{u} + 1\right)du = +\frac{4}{u} + 4\cdot\ln|u| - u + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = \frac{4}{2-x} + 4\cdot\ln|2-x| + x - 2 + C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(4) $\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$

Substitution: $u = x + 2$ also $du = dx$
und: $x = u - 2$

$$= \int \frac{(u-2)^2-1}{u}du = \int \frac{u^2-4u+3}{u}du = \int \left(u-4+\frac{3}{u}\right)du = \tfrac{1}{2}u^2-4u+3\cdot\ln|u|+C$$

Rücksubstitution:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}(x+2)^2-4(x+2)+3\cdot\ln|x+2|+C$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\left(x^2+4x+4\right)-4(x+2)+3\cdot\ln|x+2|+C$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2-2x-6+3\cdot\ln|x+2|+C$$

Achtung: Den Summanden -6 sollte man nachträglich streichen, denn -6+C ist wieder irgend eine Konstante, die man K nennen könnte. Diese -6 kommt durch die Substitution zustande.

Ergebnis: $F(x) = \tfrac{1}{2}x^2-2x+3\cdot\ln|x+2|+K$

Trainingsaufgaben 4

(1) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$ (2) $\int \frac{x^2}{(4-x)^2}dx$ (3) $\int \frac{x^2+x-1}{(2x+4)^2}dx$

(4) $\int \frac{x}{x-1}dx$ (5) $\int \frac{2-x}{4x+1}dx$ (6) $\int \frac{(x+2)^2}{2-x}dx$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3.6 6. Merkmal:

Der Nenner enthält eine Summe mit x^2 und der Zähler auch x

Die erweiterte Substitution quadratischer Terme

Beispiele

(1) $\int \frac{x}{x^2-4}dx$

Das neue Problem liegt darin, dass nach der Substitution des Nenners durch $u = x^2 - 4$ die Substitution von x im Zähler nicht mehr ohne weiteres möglich ist. Denn löst man die Substitution nach x auf, folgt $x^2 = u + 4$ also $x = \pm\sqrt{u+4}$. Dies macht unser Integral komplizierter, so dass diese Möglichkeit entfällt.
Die Lösung ist ein ganz simpler Trick. Man berechnet zuerst das Differenzial $du = u'dx = 2x \cdot dx$.
Ein Blick auf das Integral zeigt, dass dort im Zähler x steht und hinter dem Bruchstrich dx.
Zieht man dieses dx auf den Bruchstrich, so hat man $x \cdot dx$ und aus dem Differenzial folgt: $\boxed{x \cdot dx = \frac{1}{2}du}$. Auf diese Weise gelingt es, $x \cdot dx$ auf einmal zu ersetzen.

Hier die komplette Lösung:

Substitution:	$u = x^2 - 4$.
Differenzial:	$du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx:	$x \cdot dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{x}{x^2-4}dx = \int \frac{x \cdot dx}{x^2-4} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right| + C$$

(2) $\int \frac{4x}{x^2+9}dx$

Substitution:	$u = x^2 + 9$.
Differenzial:	$du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx:	$x \cdot dx = \frac{1}{2}du$
also folgt	$4x \cdot dx = 2 \cdot du$

$$= \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{1}{u}du = 2 \cdot \ln|u| + C = 2 \cdot \ln\left|x^2+9\right| + C = 2 \cdot \ln(x^2+9) + C$$

Trainingsaufgaben 5

(1) $\int \frac{16x}{x^2+12}dx$ (2) $\int \frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}dx$ (3) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

4 Zusammenstellung aller Trainingsaufgaben

Trainingsaufgaben 1

(1) $\int (3x+1)\,dx$

(2) $\int (x^2-2x-5)\,dx$

(3) $\int \left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$

(4) $\int \left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\right)dx$

(5) $\int \left(2x^4-x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx$

(6) $\int \left(-\frac{1}{8}x^4+4x^3-5x^2+3x-7\right)dx$

Bestimme C so, dass das Schaubild der Stammfunktion F zu f durch den Punkt P geht:

(7) $f(x)=x^2-1$ P (3 I – 1)

(8) $f(x)=x^3-2x$ P (1 I 0)

(9) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x-4$ P (0 I 8)

Trainingsaufgaben 2

(1) $\int \frac{3}{x^2}\,dx$

(2) $\int \frac{4}{x}\,dx$

(3) $\int \frac{1}{2x^3}\,dx$

(4) $\int \frac{2x^2-1}{x^2}\,dx$

(5) $\int \frac{x-2}{x^2}\,dx$

(6) $\int \frac{x^2-9}{x}\,dx$

(7) $\int \frac{(x-2)^2}{4x}\,dx$

(8) $\int \frac{x^3-8}{2x^2}\,dx$

(9) $\int \frac{x^3-8}{4x}\,dx$

(10) $\int \frac{x^2+3x-2}{4x}\,dx$

(11) $\int \frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}\,dx$

(12) $\int \frac{x^2-3}{x^3}\,dx$

(13) $\int \frac{x^4+x^2-2}{4x^3}\,dx$

(14) $\int \frac{(x^2+1)^2}{2x^3}\,dx$

(15) $\int \frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2}\,dx$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Trainingsaufgaben 3

(16) $\int \frac{4}{(4x+5)^2}\,dx$ (17) $\int \frac{2}{(1-x)^3}\,dx$ (18) $\int \frac{24}{(x+12)^2}\,dx$

(19) $\int \frac{3}{3-x}\,dx$ (20) $\int \frac{-3}{(2x-4)^4}\,dx$ (21) $\int \frac{12}{(x-2)^5}\,dx$

Trainingsaufgaben 4

(22) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$ (23) $\int \frac{x^2}{(4-x)^2}\,dx$ (24) $\int \frac{x^2+x-1}{(2x+4)^2}\,dx$

(25) $\int \frac{x}{x-1}\,dx$ (26) $\int \frac{2-x}{4x+1}\,dx$ (27) $\int \frac{(x+2)^2}{2-x}\,dx$

Trainingsaufgaben 5

(28) $\int \frac{16x}{x^2+12}\,dx$ (29) $\int \frac{2x}{(x^2-4)^2}\,dx$ (30) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

5 Lösungen aller Aufgaben

nur auf der CD

Demo-Text für www.mathe-cd.de